

WYBRANE PROBLEMY STATYSTYKI WIELOWYMIAROWEJ

29. Niech $Y^{(i)} = A_i X^{(i)} + g_i$ dla $i=1,2$ gdzie $A^{(i)}$ są macierzami nieosobliwych przekształceń przestrzeni, odpowiednio p i q wymiarowej, g_i wektory przesunięcia w tych przestrzeniach. Wektor $X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$ ma

rozkład o wartości średniej $\mu = \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{bmatrix}$ i macierzy kowariancji $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{bmatrix}$. Pokaż, że korelacje

kanoniczne dla X oraz dla $Y = \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix}$ są takie same. Znajdź związek między wagami kanonicznymi

dla X i Y .

Zadania 30-33

Przypuśćmy, że wektory losowe $X^{(i)}$ są przedstawione w postaci $X^{(i)} = A_i F + G_i$, gdzie m -wymiarowy wektor F reprezentuje nieskorelowane i nieobserwowane czynniki *wspólne*, zaś G_i reprezentują czynniki *specyficzne*. Zakładamy, że $\text{cov}(F, G_i) = 0 = \text{cov}(G_1, G_2)$ oraz, że macierz kowariancji wektora czynników wspólnych F jest macierzą jednostkową, $EF = 0$ zaś Ψ_i są macierzami kowariancji wektorów G_i . Parametr m określa liczbę czynników wspólnych.

30. Wyraż macierze kowariancji Σ^{kl} , $k, l=1,2$ za pomocą macierzy A_i oraz Ψ_i . Od jakich czynników: wspólnych, czy specyficznych zależy związek między $X^{(1)}$ a $X^{(2)}$?

31. Pokaż, że $m \geq r(\Sigma^{12})$, gdzie $r(\Xi)$ jest rzędem macierzy Ξ oraz że rząd macierzy Σ^{12} jest równy liczbie niezerowych korelacji kanonicznych.

Wskazówka: skorzystaj z nierówności $r(CD) \leq \min(r(C), r(D))$

32. Niech $A_1 = [\sqrt{\rho_1} a^{(1)}, \sqrt{\rho_2} a^{(2)}, \dots, \sqrt{\rho_k} a^{(k)}]$, $A_2 = [\sqrt{\rho_1} b^{(1)}, \sqrt{\rho_2} b^{(2)}, \dots, \sqrt{\rho_k} b^{(k)}]$, gdzie $k = r(\Sigma^{12})$, $\rho_j, a^{(j)}, b^{(j)}$ są korelacjami i odpowiednimi wagami kanonicznymi. Pokaż, że istnieje k -wymiarowy wektor losowy F o jednostkowej macierzy kowariancji i zerowej wartości oczekiwanej, taki że $\text{cov}(X^{(i)}, F) = A_i$.

Wskazówka. Pokaż, że istnieje $k+p+q$ -wymiarowy wektor losowy $Z = [X', F']'$ o macierzy kowariancji spełniającej warunki zadania. Wystarczy pokazać, że macierz, mająca być macierzą kowariancji jest nieujemnie określona.

33. Niech $G_i = X^{(i)} - A_i F$. Pokaż, że $\text{cov}(F, G_i) = 0 = \text{cov}(G_1, G_2)$. Z tego wynika, że zawsze możemy zapisać wektor X za pomocą co najmniej $k = r(\Sigma^{12})$ czynników wspólnych.

34. Znajdź korelacje i wagi kanoniczne dla wektora $X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$, o częściach odpowiednio p i q

wymiarowych, w którym jest dokładnie jeden czynnik wspólny a czynniki specyficzne są deterministyczne. Narysuj koło korelacyjne zmiennych kanonicznych ze zmiennymi oryginalnymi. Wykonaj to samo zadanie ale w przypadku gdy nie ma czynników wspólnych.

35. Znajdź korelacje i wagi kanoniczne dla wektora $X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}$, o częściach odpowiednio p i q

wymiarowych, w którym czynnik wspólny wiąże się z obserwacjami poprzez macierze $A_1 = A$ i $A_2 = I$, gdzie I jest q -wymiarową macierzą jednostkową a czynniki specyficzne są deterministyczne. Zakładamy, że żaden wiersz macierzy A nie jest wektorem zerowym. Narysuj koło korelacyjne zmiennych kanonicznych ze zmiennymi oryginalnymi.

36. Dla macierzy korelacji z zad. 7 znajdź korelacje i wagi kanoniczne między grupą danych dotyczących wyników testów P i V a zmiennymi A i E określającymi wiek i lata edukacji. Narysuj koło korelacyjne zmiennych kanonicznych ze zmiennymi oryginalnymi i skomentuj praktyczny aspekt uzyskanych wyników. Zbadaj niezależność poszczególnych zmiennych kanonicznych.

37. Wykonaj analizy, jak w zad. 36 dla zmiennych opisujących wielkość 29 drzew owocowych: M – logarytm masy korzeni dojrzałego drzewa, O - logarytm podstawowego obwodu pnia dojrzałego drzewa, P4 –całkowity wzrost pędów w ciągu 4 lat, O4 - podstawowy obwód pnia drzewa czteroletniego, o macierzy korelacji

	M	O	P4	O4
M	1	0,94	0,27	0,18
O	0,94	1	0,42	0,36
P4	0,27	0,42	1	0,84
O4	0,18	0,36	0,84	1

Przeanalizuj związek kanoniczny między zmiennymi, związanymi z rozmiarami drzewa dojrzałego i jego rozmiarami w wieku 4 lat.